अध्यायः 9

बीजीयव्यञ्जकः सर्वसमिकाश्च

9.1 व्यञ्जकः कः अस्ति ?

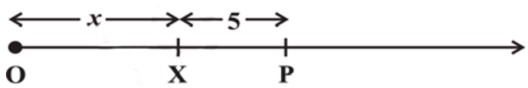
गतकक्ष्यासु वयं बीजीयव्यञ्जकविषये ज्ञानं प्राप्तवन्तः। $x + 3$, $2y - 5$, $3x^2$, $4xy + 7$ इत्यादयः व्यञ्जकानाम् उदाहरणानि सन्ति। भवन्तः इतोपि अधिकं व्यञ्जकं निर्मातुं शक्नुवन्ति। यथा

भवन्तः जानन्ति यत् व्यञ्जकानां निर्माणं चराणाम् अचराणां सहायतया भवति। व्यञ्जकः $2y - 5$ इति चरस्य निर्माणं y तथा अचरस्य निर्माणं 2 तथा 5 इत्यनेन भवति। व्यञ्जकः $4xy+7$ इति चरस्य निर्माणं x तथा y एवम् अचरस्य निर्माणं 4 तथा 7 इत्यनेन कृतं वर्तते।

वयं जानीमः यत् व्यञ्जकः $2y - 5$ इत्यस्मिन् y इत्यस्य मानं किमपि भवितुम् अर्हति एषः व्यञ्जकः 2,5, -3,0, $\frac{5}{2}$, $\frac{-7}{3}$ इत्यादयः भवितुम् अर्हन्ति। वास्तविकरूपे y इत्यस्य असंख्यानि विभिन्नमानानि भवितुम् अर्हन्ति। व्यञ्जकस्य चरस्य मानं परिवर्त्तने सति व्यञ्जकस्य मानं परिवर्तितं भवति। इत्थं y इत्यस्य विभिन्नमानं दाने सति $2y - 5$ इत्यस्य मानं परिवर्ततनं भवति यदा $y = 2$, $2y - 5 = 2\ (2) -5 = -1$, यदा $y = 0$, $2y - 5= 2 \times 0 - 5 = -5$ इत्यादिः। y इत्यस्य किञ्चित् दत्तेभ्यः अन्येभ्यः मानेभ्यः व्यञ्जकः $2y - 5$ इत्यस्य मानं जानन्तु।

संख्यारेखा व्यञ्जकश्च

व्यञ्जकः $x + 5$ इत्यस्य चर्चां कुर्वन्तु। आगच्छन्तु स्वीकुर्वन्तु यत् संख्यारेखायाः उपरि चरः x इत्यस्य स्थितिः X अस्ति।



X , संख्या रेखायां कुत्रापि भवितुम् अर्हति परन्तु एतत् निश्चितम् अस्ति यत् $x + 5$ इत्यस्य मानं , x इत्यस्य दक्षभागे 5 एककस्य दूरे P इति बिन्दुना निरूपितं भवति। एवमेव $x - 4$ इत्यस्य मानं X इत्यस्य वामभागे 4 एककस्य दूरे भविष्यति। $4x$ एवं $4x + 5$ इत्यस्य स्थितिविषये किं कथयितुम् अर्हामः ?

$4x$ इत्यस्य स्थितिः C इति बिन्दौ भविष्यति। मूलबिन्दुतः C इत्यस्य दूरी X इत्यस्य दूरीतः चतुर्गुणः भविष्यति। $4x + 5$ इत्यस्य स्थितिःD , C इत्यस्य दक्षभागे 5 एककस्य दूरीपर्यन्तं भविष्यति।

प्रयासं करोतु

- एकचरीय द्विचरीयव्यञ्जकानां पञ्च-पञ्च उदाहरणानि ददतु।
- x , x - 4 , 2x + 1, 3x - 2 इति संख्यारेखायां दर्शयन्तु।

9.2 पदं , गुणनखण्डः गुणाङ्कश्च

4x + 5 इति व्यञ्जकं स्वीकुर्वन्तु। एषः व्यञ्जकः 4x एवं 5 पदद्वयेन निर्मितः। पदानि संगृह्य व्यञ्जकः भवति पदं स्वयम् अपि गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे निर्मातुं शक्यते। 4x पदं स्वयमपि गुणनखण्डानां 4 तथा x इत्यस्य गुणनफलम् अस्ति। पदं 5 केवलं एकेन गुणनखण्डेन 5 इत्यनेन निर्मितम् अस्ति।

प्रयासं करोतु

प्रयत्नं कुर्वन्तु $x^2y^2- 10x^2 y+5xy^2-20$ व्यञ्जकस्य प्रत्येकं पदस्य गुणाङ्कं परिचिन्वन्तु।

व्यञ्जकः 7xy - 5x इत्यस्य पदद्वयम् 7xy एवं 5x स्तः।7xy पदं 7, x तथा y गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति। कस्यापि पदस्य संख्यात्मकः गुणनखण्डः तस्य संख्यात्मकः गुणाङ्कः अथवा गुणाङ्कः उच्यते। 7xy पदस्य गुणाङ्कः 7 अस्ति तथा - 5x इति पदस्य गुणाङ्कः -5 अस्ति।

9.3 पदी द्विपदं बहुपदञ्च

यस्मिन् व्यञ्जके केवलम् एकं पदं भवति तत् एकपदी इति उच्यते। पदद्वयव्यञ्जकः द्विपदम् इति उच्यते। पदत्रयाणां व्यञ्जकः त्रिपदी इति उच्यते तथा एवमेव अन्यद् अपि। व्यापकतः, एकम् अथवा अधिकपदीय व्यञ्जकः यस्य गुणाङ्कः शून्येतरः भवेत् तथा यस्य चराणां घातः ऋणेतरः भवेत् तत् बहुपदं भवति। बहुपदस्य पदानां संख्या एका अथवा एकतः अधिका काचिद् अपि भवितुम् अर्हति।

एकपदस्य उदाहरणम् : $4x^2$, 3xy, -7z, $5xy^2$, 10y, -9, 82mnp इत्यादयः।

द्विपदस्य उदाहरणम् : a+b, 4l+5m, a+4, 5-3xy, z^2- $4y^2$ इत्यादयः।

त्रिपदस्य उदाहरणम् : a+b+c, 2x+3y-5, x^2 y- xy^2+ y^2 इत्यादिः।

बहुपदस्य उदाहरणम् : a+b+c+d, 3xy, 7xyz-10, 2x+3y+7z इत्यादिः।

प्रयासं करोतु

1. निम्नलिखितबहुपदानां एकपदे द्विपदे त्रिपदे च वर्गीकरणं कुर्वन्तु।
   -z + 5, x + y + z, y + z + 100, ab - ac, 17
2. निर्मान्तु -
   (a) त्रयम् एतादृशं द्विपदं यस्मिन् केवलम् एकः चरः x भवेत्।
   (b) त्रयम् एतादृशं द्विपदं यस्मिन् x तथा y भवेताम्।
   (c) त्रयम् एकपदं यस्मिन् x तथा y भवेताम्।
   (d) चत्वारि अथवा अधिकपदयुक्तं 2 बहुपदम्।

9.4 समानम् असमानञ्च पदम्

निम्नलिखितव्यञ्जकान् पश्यन्तु।

7x, 14x, -13x, $5x^2$, 7y, 7xy, - $9y^2$, $-9x^2$, -5yx

एतेषु समानपदम् इत्थम् अस्ति।

(i) $7x$, $14x$ तथा-$13x$ (ii) $5x^2$ तथा- $9x^2$

(iii) $7xy$ एवं-$5yx$

$7x$ एवं $7y$ समानंपदंकथंनस्तः?

$7x$ एवं $7xy$ समानंपदंकथंनस्तः?

$7x$ एवं $5x^2$ समानंपदंकथंनस्तः?

प्रयासं करोतु

निम्नलिखितेषु प्रत्येकं द्वे समानपदे लेखनीये -

(i) $7xy$ (ii) $4mn^2$ (iii) 2l

9.5 बीजीयव्यञ्जकानां योगः व्यवकलनञ्च

गतकक्ष्यासु वयम् एतत् अपि शिक्षितवन्तः यत् बीजीयव्यञ्जकानां योगः अथ व्यवकलनं कथं भवेत् उदाहरणार्थं $7x^2-4x+5$ एवं $9x-10$ इति योगार्थं वयम् एवं रीत्या कुर्मः।

$$\begin{array}{r} 7x^2-4x+5 \\ +\quad 9x-10 \\ \hline 7x^2+5x-5 \end{array}$$

विचारयन्तु यत् वयं योगफलं कथं जानीमः। योज्यमानान् प्रत्येकं व्यञ्जनान् वयं विभिन्नपङ्क्तौ लिखामः। एतस्मिन् समये वयं समानपदानि परस्परम् अधोपरि लिखामः तथा यथा उपरि दर्शितम् अस्ति वयं तानि समानपदानि योजयामः। अतः $5 + (-10)= 5 - 10 = -5$ एवमेव $-4x + 9x = (-4 + 9)x= 5x$, आगच्छन्तु केषाञ्चन उदाहरणानां समाधानं कुर्मः।

उदाहरणम् 1 : $7xy + 5yz - 3zx$, $4yz + 9xz - 4y$, $-3xz + 5x - 2xy$ इत्यस्य योगं जानीमः।

समाधानम् : समानपदानि परस्परम् अधोपरि संस्थाप्य त्रीन् व्यञ्जकान् विभिन्नपङ्क्तिषु विलिखन्तः वयं प्राप्नुमः।

$$\begin{array}{lllll} & 7xy & + 5yz & - 3zx & \\ + & & 4yz & + 9zx & \quad - 4y \\ + & -2xy & & -3zx & + 5x \\ \hline & 5xy & + 9yz & + 3zx + 5x & - 4y \end{array}$$

(ध्यानं ददतु xz तथा zx समाने एव स्तः)

इत्थं व्यञ्जकानां योगः $5xy + 9yz + 3zx + 5x - 4y$ अस्ति।ध्यानं ददतु द्वितीयव्यञ्जकस्य पदं -4 तथा तृतीयव्यञ्जकस्य पदं 5 इत्यस्य योगफले तथैव लिखितम् अस्ति यथा ते सन्ति यतो हि अपरव्यञ्जकेषु तेषां स्थानम् एव नास्ति।

उदाहरणम् 2 : $7x^2-4xy+8y^2+5x-3y$ इत्यस्यमात् $5x^2- 4y^2+6y-3$ इति व्यवकलयन्तु।

समाधानम् :

$$\begin{array}{l} 7x^2 - 4xy + 8y^2 + 5x - 3y \\ 5x^2 \qquad\quad -4y^2 \qquad +6y-3 \\ (-) \qquad (+) \qquad\qquad (-) \quad (+) \\ \hline 2x^2-4xy+12y^2+5x-9y+3 \end{array}$$

सूचना - कस्याः अपि संख्यायाः व्यवकलनं यस्य योज्यप्रतिलोमं योगस्य समानम् अस्ति। एवं रीत्या -3 इति व्यवकलनं +3 इति योगस्य समानम् अस्ति एवमेव-6y इति व्यवकलनं -6y इति योगस्य समानम् अस्ति। $-4y^2$ इति व्यवकलनं $4y^2$ इति योगस्य समानम् अस्ति तथा एवमेव अन्यस्याः द्वितीयपङ्क्तेः प्रत्येकं पदस्य नीचैः तृतीयपङ्क्तौ टङ्कितचिह्नेन एतत् ज्ञातुं साहाय्यं मिलति यत् का सङ्क्रिया भवति।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखितव्यञ्जकेषु प्रत्येकं पदानि गुणाङ्कान् च परिचिन्वन्तु -

   (i) $5xyz^2-3zy$ (ii) $1+x+x^2$ (iii) $4x^2y^2-4x^2y^2z^2+z^2$

   (iv) $3-pq+qr-rp$ (v) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-xy$ (vi) $0.3a-0.6ab+0.5b$

2. निम्नलिखित-बहुपदं एकपदे द्विपदे त्रिपदे वर्गीकरणं कुर्वन्तु। कतमं बहुपदं एतेषु त्रिषु श्रेणिषु केषुचित् अपि नास्ति ?

   $x+y, 1000, x+x^2+x^3+x^4, 7+y+5x, 2y-3y^2, 2y-3y^2+4y^3, 5x-4y+3xy, 4z-15z^2, ab+bc+c-d+da, pqr, p^2q+pq^2, 2p+2q$

3. निम्नलिखितानां योगं जानन्तु।

   (i) $ab-bc, bc-ca, ca-ab$ (ii) $a-b+ab, b-c+bc, c-a+ac$

   (iii) $2p^2q^2-3pq+4, 5+7pq-3p^2q^2$ (iv) $l^2+m^2, m^2+n^2, n^2+l^2, 2lm+2mm+2nl$

4. (a) $12a-9ab+5b-3$ इत्यस्मात् $4a-7ab+3b+12$ इति व्यवकलयन्तु।

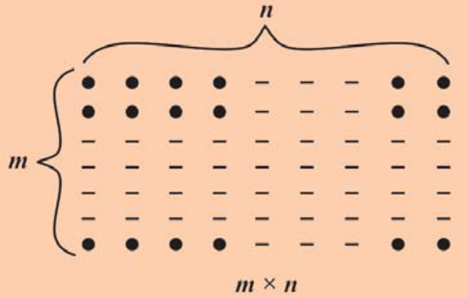
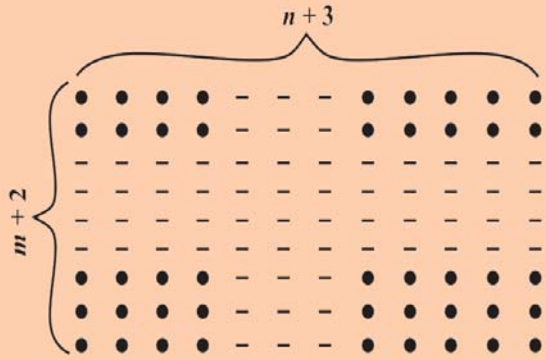
   (b) $5xy-2yz-2zx+10xyz$ इत्यस्मात् $3xy+5yz-7zx$ इति व्यवकलयन्तु।

   (c) $18-3p-11q+5pq-2pq^2+5p^2q$ इत्यस्मात् $4p^2q-3pq+5pq^2-8p+7q-10$ इति व्यवकलयन्तु।

9.6 बीजीय व्यञ्जकानां गुणनम्

(i) बिन्दूनां निम्नलिखितप्रतिरूपं पश्यन्तु -

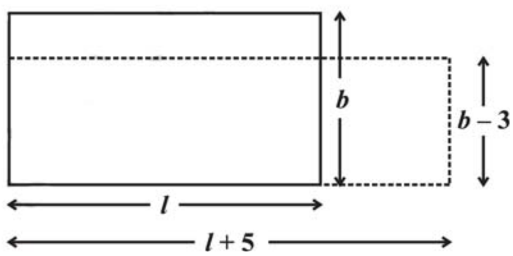
बिन्दूनां प्रतिरूपम्	बिन्दूनां सम्पूर्णा संख्या
● ●	4×9
● ●	5×7

	$m \times n$
	$(m+2) \times (n+3)$

बिन्दूनां संख्यां ज्ञातुं वयं पङ्क्तीनां संख्यायाः व्यञ्जकान् स्तम्भानां संख्यायाः व्यञ्जकैः सह गुणनं कुर्मः ।

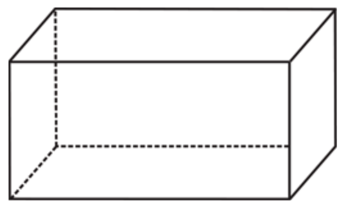
अत्र पङ्क्तीनां संख्या 2 इति वर्धिता अस्ति अर्थात् $m+2$ तथा स्तम्भानां संख्या 3 इति वर्धिता अस्ति अर्थात् $n+3$ ।

(i) किं भवन्तः इतोपि ईदृक्परिस्थितीनां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति यस्मिन् बीजीयद्वयव्यञ्जकानां गुणनं करणीयं भवेत्? अमीना उत्थाय वदति । वयम् आयतस्य क्षेत्रफलविषये विचारयितुं शक्नुमः । आयतस्य क्षेत्रफलं $l \times b$ अस्ति यस्मिन् l औन्नत्यम् अस्ति तथा b वैशाल्यम् अस्ति यदि आयतस्य औन्नत्यं 5 एककः वर्धितः भवेत् अर्थात् $(l + 5)$ इति भवेत् तथा वैशाल्यं 3 एककः न्यूनः भवेत् अर्थात् $(b - 3)$ इति भवेत् तदा आयतस्य क्षेत्रफलं $(l + 5) \times (b - 3)$ इति भविष्यति ।



आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं वयं $l \times b$ अथवा $(l + 5) \times (b - 3)$ इति रूपस्य बीजीय व्यञ्जकानां गुणनं कुर्मः ।

(ii) किं भवन्तः आयतनस्य विषये विचारयितुं समर्थाः सन्ति ? (एकस्य आयताकारस्य मञ्जूषायाः आयतनं तस्य दीर्घतायाः वैशाल्यस्य अथ औन्नतस्य गुणनफलेन प्राप्यते ।)



(iv) सरिता कथयति यत् यदा वयं कमपि वस्तु क्रीणिमः तदा वयं गुणनं कुर्मः । उदाहरणार्थं यदि प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं p रुप्यकम् अस्ति तथा विद्यालयीय विहाराय z इति द्वादशकदलीफलानाम् आवश्यकता अस्ति तर्हि अस्माभिः $(p \times z)$ रुप्यकं देयं भविष्यति ।

स्वीकुर्वन्तु प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं 2 रुप्यकं न्यूनम् अस्ति तथा विहाराय कदलीफल-द्वादशकस्य चतुर्गुणं न्यूनम् आवश्यकता भविष्यति चेत् प्रतिद्वादशं कदलीफलानां मूल्यं $(p - 2)$ रुप्यकम् अभविष्यत् तथा $(z - 4)$ इति द्वादशमात्मक-कदलीफलानाम् आवश्यकता अभविष्यत् । अत एव अस्माभिः $(p - 2) \times (z - 4)$ रुप्यकं देयं भवति ।

प्रयासं करोतु

किं भवन्तः ईदृक्परिस्थितीनां विषये विचारयितुं शक्नुवन्ति यत्र वयं बीजीयव्यञ्जकानां गुणनं करणीयं भविष्यति ?

सूचना
- वेगः तथा समयस्य विषये विचारयन्तु।
- साधारणं वृद्धिः, मूलधनं तथा साधारण-वृद्धेः परिमाणादिकस्य विषये चिन्तयन्तु।

उपर्युक्तेषु सर्वेषु उदाहरणेषु वयं राशिदव्यस्य अथवा ततोपि अधिकानां राशीनां गुणनं कृतवन्तः। यदि राशयः बीजीयव्यञ्जकरूपे सन्ति तथा वयं तेषां गुणनफलं ज्ञातुम् इच्छामः तर्हि अस्य अयम् अर्थः यत् अस्माभिः एतत् ज्ञातव्यं एतत् गुणनफलं कथं प्राप्यते इति अस्माभिः ज्ञातव्यम्। आगच्छन्तु एतत् क्रमेण कुर्मः। सर्वप्रथमं वयम् द्वयोः एकपदयोः गुणनं कुर्मः।

9.7 एकपदीयानां एकपदीयैः सह गुणनम्

9.7.1 द्वयोः एकपदयोः गुणनम्

वयं प्रारम्भं कुर्मः

$4 \times x = x+x+x+x = 4x$ इति यत् वयं पूर्वं शिक्षितवन्तः।

एवमेव $4 \times (3x) = 3x+3x+3x+3x = 12x$

अधुना निम्नलिखितगुणनफलानां विषये विचारं कुर्वन्तु -

(i) $x \times 3y = x \times 3 \times y = 3 \times x \times y = 3xy$

(ii) $5x \times 3y = 5 \times x \times 3 \times y = 5 \times 3 \times x \times y = 15xy$

(iii) $5x \times (-3y) = 5 \times x \times (-3) \times y$

$= 5 \times (-3) \times x \times y = -15xy$

ध्यानं ददतु त्रयाणाम् अपि एकपदीयानां गुणनफलं $3xy, 15xy, -15xy$ अपि एकपदी एव अस्ति।

किञ्चित् इतोपि उपयुक्त-उदाहरणं निम्नम् अस्ति -

(iv) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2)$

$= 20 \times x^3 = 20x^3$

(v) $5x \times (-4xyz) = (5 \times -4) \times (x \times xyz)$

$= -20 \times (x \times x \times yz) = -20x^2yz$

लिखन्तु $5 \times 4 = 20$ अर्थात् गुणनफलस्य गुणाङ्कः = प्रथमम् एकपद्याः गुणाङ्कः × द्वितीय एकपद्याः गुणाङ्कः तथा

$x \times x^2 = x^3$

अर्थात् गुणनफलस्य बीजीय गुणनखण्डः = प्रथमम् एकपद्याः बीजीयगुणनखण्डः × द्वितीय एकपद्याः बीजीयगुणनखण्डः।

ध्यानं ददतु यत् वयं द्वयोः एकपदयोः बीजीयभागानां विभिन्नचराणां घातान् कथम् एकत्रिकुर्मः। एवं करणाय वयं घातीय नियमानाम् उपयोगं कुर्मः।

9.7.2 ति-सृणाम् अथवा अधिकानाम् एकपदीनां गुणनम्

निम्नलिखित-उदाहरणेषु विचारं कुर्वन्तु

(i) $2x \times 5y \times 7z = (2x \times 5y) \times 7z = 10xy \times 7z = 70xyz$

(ii) $4xy \times 5x^2y^2 \times 6x^3y^3 = (4xy \times 5x^2y^2) \times 6x^3y^3 = 20x^3y^3 \times 6x^3y^3 = 120x^3y^3 \times x^3y^3$

$= 120\,(x^3 \times x^3) \times (y^3 \times y^3) = 120x^6 \times y^6 = 120x^6y^6$

एतत् स्पष्टम् अस्ति यत् वयं सर्वप्रथमं द्वयोः एकपद्योः गुणनं कुर्मः तथा इत्थं गुणनफलरूपे प्राप्ताम् एकपदीं तृतीय एकपद्या सह गुणनं कुर्मः। बहुसंख्य-एकपदीयानां गुणनार्थं अस्य विधेः विस्तारं कर्तुं शक्नुमः।

प्रयासं करोतु

$4x \times 5y \times 7z$ जानन्तु सर्वप्रथमं $4x \times 5y$ जानन्तु तथा तस्य $7z$ इत्यनेन साकं गुणनं कुर्वन्तु अथवा सर्वप्रथमं $5y \times 7z$ जानन्तु तथा तस्य $4x$ इत्यनेन साकं गुणनं कुर्वन्तु किं परिणामः समानः एव अस्ति ? भवन्तः किं विचारयन्ति ? किं गुणाकारसमये क्रमस्य महत्त्वम् अस्ति ?

वयम् अपरेण विधिना अपि एतत् गुणनफलं ज्ञातुं शक्नुमः - $4xy \times 5x^2 y^2 \times 6x^3 y^3 = (4 \times 5 \times \times 6) \times (x \times x^2 \times x^3) \times (y \times y^2 \times y^3) = 120x^6 y^6$

उदाहरणम् 3 एकस्य आयतस्य यस्य दैर्घ्यं वैशाल्यञ्च दत्तम् अस्ति क्षेत्रफलस्य सारणीं पूरयन्तु ।

समाधानम्

दैर्घ्यम्	वैशाल्यम्	क्षेत्रफलम्
$3x$	$5y$	$3x \times 5y = 15xy$
$9y$	$4y^2$	……………
$4ab$	$5bc$	……………
$2l^2 m$	$3lm^2$	……………

उदाहरणम् 4 निम्नलिखितसारण्यां तिसृणां मञ्जूषाणाम् आयताकारस्य लम्बं वैशाल्यम् अथ औन्नत्यं प्रदत्तम् अस्ति । प्रत्येकम् आयतनं जानन्तु ।

	लम्बम्	वैशाल्यम्	औन्नत्यम्
(i)	$2ax$	$3by$	$5cz$
(ii)	$m^2 n$	n^2p	$p^2 m$
(iii)	$2q$	$4q^2$	$8q^3$

समाधानम् आयतनम् = दैर्घ्यम् × वैशाल्यम् × औन्नत्यम्

अतः (i) आयतनम् $= (2ax) \times (3by) \times (5cz)$

$= 2 \times 3 \times 5 \times (ax) \times (by) \times (cz) = 30abcxyz$

(ii) आयतनम् $= m^2 n \times n^2 p \times p^2 m$

$= (m^2 \times m) \times (n \times n^2) \times (p \times p^2) = m^3 n^3 p^3$

(iii) आयतनम् $= 2q \times 4q^2 \times 8q^3$

$= 2 \times 4 \times 8 \times q \times q^2 \times q^3 = 64q^6$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्नलिखित-एकपदीयुग्मानां गुणनफलं जानन्तु -

(i) $4, 7q$ (ii) $-4p, 7q$ (iii) $-4q, 7pq$ (iv) $4p^3, -3p$

(v) $4p, 0$

2. निम्नलिखित-एकपदी-युग्मानां रूपे दैर्घ्य-वैशाल्ययुक्तानाम् आयतानां क्षेत्रफलं जानन्तु ।

$(p,q); (10m, 5n); (20x^2, 5y^2); (4x, 3x^2); (3mn, 4np)$

3. गुणनफलानां सारणीं पूरयन्तु ।

प्रथम-एकपदी → / द्वितीय-एकपदी ↓	$2x$	$-5y$	$3x^2$	$-4xy$	$7x^2 y$	$-9x^2 y^2$
$2x$	$4x^2$	……..	……..	……..	……..	……..
$-5y$	……..	……..	$-15x^2 y$	……..	……..	……..
$3x^2$	……..	……..	……..	……..	……..	……..
$-4xy$	……..	……..	……..	……..	……..	……..
$7x^2 y$	……..	……..	……..	……..	……..	……..
$-9x^2 y^2$	……..	……..	……..	……..	……..	……..

4. ईदृशानाम् आयताकार-मञ्जुषाणाम् आयतनं जानन्तु येषां दैर्घ्यं, वैशाल्यम्, औन्नत्यञ्च क्रमशः निम्नलिखितं वर्तते ।

(i) $5a, 3a^2, 7a^4$ (ii) $2p, 4q, 8r$ (iii) $xy, 2x^2 y, 2xy^2$ (iv) $a, 2b, 3c$

5. निम्नलिखितानां गुणनफलं जानन्तु ।

(i) xy, yz, zx (ii) $a, -a^2, a^3$ (iii) $2, 4y, 8y^2, 16y^3$

(iv) $a, 2b, 3c, 6abc$ (v) $m, -mn, mnp$

9.8 एकपदीनां बहुपदैः सह गुणनम्

9.8.1 एकपदीनां द्विपदैः सह गुणनम्

आगच्छन्तु $3x$ इति एकपदी $5y+2$ द्विपदेन इत्यनेन गुणनं कुर्मः अर्थात् $3x \times (5y+2)$ जानीमः । स्मरन्तु यत् $3x$ तथा $(5y+2)$ संख्यां निरूपयति । अत एव वितरणस्य नियमानाम् उपयोगं कुर्वन्तः

$3x \times (5y+2) = (3x \times 5y) + (3x \times 2) = 15xy + 6x$ इति प्राप्नुमः ।

वयं सामान्यतः स्व परिकलनेषु वितरणनियमस्य उपयोगं कुर्मः । उदाहरणार्थम्

$7 \times 106 = 7 \times (100 + 6)$

$= 7 \times 100 + 7 \times 6$ (अत्र वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कृतवन्तः)

$7 \times 38 = 7 \times (40 - 2)$

$= 7 \times 40 - 7 \times 2$ (अत्र वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कृतवन्तः)

$= 280 - 14 = 266$

एवमेव $(-3x) \times (-5y+2) = (-3x) \times (-5y) + (-3x) \times (2) = 15xy - 6x$

तथा $5xy \times (y^2+3) = (5xy \times y^2) + (5xy \times 3) = 5xy^3 + 15xy$.

द्विपदस्य एकपद्याः च गुणनफलविषये भवन्तः किं विचारयन्ति ? उदाहरणार्थं $(5y+2) \times 3x = ?$

वयं $7 \times 3 = 3 \times 7$; अथवा व्यापकरूपेण $a \times b = b \times a$ इति रूपे क्रमविनिमेय-नियमस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः ।

एवमेव $(5y+2) \times 3x = 3x \times (5y+2) = 15xy + 6x$ अस्ति ।

प्रयासं करोतु

गुणनफलं जानन्तु (i) $2x(3x+5xy)$ (ii) $a^2(2ab-5c)$

9.8.2 एकपदीनां त्रिपदैः सह गुणनम्

$3p \times (4p^2+5p+7)$ इति स्वीकुर्वन्तु। पूर्वमिव वयं वितरणनियमस्य उपयोगं कर्तुं शक्नुमः।

$$3p\times(4p^2+5p+7)=(3p\times4p^2)+(3p\times5p)+(3p\times7)$$
$$=12p^3+15p^2+21p$$

त्रिपदस्य प्रत्येकं पदम् एकपद्या सह गुणनं कुर्वन्तु तथा गुणनफलं योजयन्तु।

प्रयासं करोतु

$(4p^2+5p+7)\times3p$ इत्यस्य गुणनफलं जानन्तु।

विचारयन्तु वितरणनियमस्य उपयोगेन वयम् एकपदस्य एकपदेन साकं गुणनं कर्तुं सक्षमाः स्मः।

उदाहरणम् 5 व्यञ्जकान् सरली कुर्वन्तु तथा निर्देशानुसारं मानं जानन्तु।

$x(x-3)+2$, $x=1$ इत्यस्य कृते (ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63$, $y=-2$ इत्यस्य कृते

समाधानम्

(i) $x(x-3)+2=x^2-3x+2$

$x=1$ इत्यस्य कृते $x^2-3x+2=(1)^2-3(1)+2$

$=1-3+2=3-3=0$

(ii) $3y(2y-7)-3(y-4)-63=6y^2-21y-3y+12-63$

$= 6y^2-24y-51$

$y=-2$ इत्यस्य कृते, $6y^2-24y-51=6(-2)^2-24(-2)-51$

$= 6\times4+24\times2-51$

$= 24+48-51=72-51=21$

उदाहरणम् 6 योजयन्तु -

(i) $5m(3-m)$ तथा $6m^2-13m$ (ii) $4y(3y^2+5y-7)$ तथा $2(y^3-4y^2+5)$

समाधानम्

(i) प्रथमः व्यञ्जकः $5m(3-m)=(5m\times3)-(5m\times m)=15m-5m^2$

अधुना द्वितीयव्यञ्जकं योजने सति $15m-5m^2+6m^2-13m= m^2+2m$

(ii) प्रथमः व्यञ्जकः $= 4y(3y^2+5y-7) = (4y\times3y^2)+(4y\times5y)+(4y\times(-7))$

$= 12y^3+20y^2-28y$

द्वितीयव्यञ्जकः $= 2(y^3-4y^2+5) = 2y^3+2\times(-4y^2)+2\times5$

$= 2y^3-8y^2+10$

उभयोः व्यञ्जकयोः योजने सति

$$\begin{array}{rrrr} & 12y^3 & +\ 20y^2-28y & \\ + & 2y^3 & -\ 8y^2 & +10 \\ \hline & 14y^3 & +\ 12y^2-28y & +10 \end{array}$$

उदाहरणम् 7 : $2pq\ (p+q)$ इत्यस्मात् $3pq\ (p-q)$ इति व्यवकलयन्तु।

समाधानम् वयं प्राप्नुमः $3pq\ (p-q)=3p^2q-3pq^2$ तथा

$2pq\ (p+q)=2p^2q-2pq^2$

व्यवकलने सति

$$\begin{array}{rcr} & 2p^2q & + & 2pq^2 \\ & 3p^2q & - & 3pq^2 \\ - & & + & \\ \hline & -p^2q & + & 5pq^2 \end{array}$$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्नलिखितयुग्मेषु प्रत्येकं व्यञ्जकानां गुणनं कुर्वन्तु।

$4p,q+r$ (ii) $ab,a-b$ (iii) $a+b\ ,7a^2b^2$ (iv) $a^2-9,4a$ (v) $pq+qr+rp\ ,0$

2. सारणीं पूरयन्तु

	प्रथमव्यञ्जकः	द्वितीयव्यञ्जकः	गुणनफलम्
(i)	a	$b+c+d$	-------
(ii)	$x+y-5$	$5xy$	-------
(iii)	p	$6p^2-7p+5$	-------
(iv)	$4p^2q^2$	p^2-q^2	-------
(v)	$a+b+c$	abc	-------

3. गुणनफलं जानन्तु

(i) $(a^2)\times(2a^{22})\times(4a^{26})$ (ii) $\left(\frac{2}{3}xy\right)\times\left(\frac{-9}{10}x^2y^2\right)$

(iii) $\left(-\frac{10}{3}pq^3\right)\times\left(\frac{6}{5}p^3q\right)$ (iv) $x\times x^2\times x^3\times x^4$

4. (a) $3x\ (4x-5)+3$ इति सरलीकुर्वन्तु तथा (i) $x=3$ एवं (ii) $x=\frac{1}{2}$ इत्यस्य कृते अस्य मानं जानन्तु।

(b) $a\ (a^2+a+1)+5$ इति सरलीकुर्वन्तु तथा (i) $a=0$, (ii) $a=1$ एवं (iii) $a=-1$ इत्यस्य कृते अस्य मानं जानन्तु।

5. (a) $p\ (p-q),q\ (q-r)$ एवं $r\ (r-p)$ इति योजयन्तु।

(b) $2x\ (z-x-y)$ एवं $2y\ (z-y-x)$ इति योजयन्तु।

(c) $4l\ (10n-3m+2l)$ इत्यस्मात् $3l\ (l-4m+5n)$ इति व्यवकलयन्तु।

(d) $4c\ (-a+b+c)$ इत्यस्मात् $3a\ (a+b+c)-2\ b\ (a-b+c)$ इति व्यवकलयन्तु।

9.9 बहुपदं बहुपदेन साकं गुणनम्

9.9.1 द्विपदं द्विपदेन साकं गुणनम्

आगच्छन्तु एकं द्विपदं (2a+3b) इति (3a+4b) द्विपदेन इत्यनेन साकं गुणनं कुर्मः। यथा वयं पूर्वम् अपि कृतवन्तः तथैव गुणनस्य वितरणनियमानुसरणं कुर्वन्तः वयम् एतम् अपि क्रमेण कुर्मः।

$$(3a+4b)\times(2a+3b)=3a \times (2a+3b)+4b \times (2a+3b)$$

ध्यानं ददतु एकद्विपदस्य प्रत्येकं पदम् अपरद्विपदस्य प्रत्येकं पदेन सह गुणनं भवति।

$= (3a\times2a)+(3a\times3b)+(4b\times2a)+(4b\times3b)$

$= 6a^2+9ab+8ba+12b^2$

$= 6a^2+17ab+12b^2$ (यतो हि $ba=ab$ अस्ति)

यदा वयम् एकस्य पदस्य एकेन पदेन साकं गुणनं कुर्मः तदा वयम् आशां कुर्मः यत् $2\times2=4$ पदानि परन्तु एतेषु योजितेषु पदेषु पदद्वयं समानम् अस्ति अतः पादत्रयं प्राप्तवन्तः।

बहुपदं बहुपदेन साकं गुणनसमये अस्माभिः समानपदम् अन्वेष्टव्यं तथा तस्य मेलनम् अपि कर्त्तव्यम्।

उदाहरणम् 8 गुणनं कुर्वन्तु

(i) (x-4) एवं (2x+3) इति (ii) (x-y) एवं (3x+5y) इति

समाधानम्

(i) $(x-4)\times(2x+3) = x \times(2x+3)-4\times(2x+3)$

$= (x\times2x)+(x\times3)-(4\times2x)-(4\times3)=2x^2+3x-8x-12$

$= 2x^2-5x-12$ (समानपदानां योजने सति)

(ii) $(x-y)\times(3x+5y)=x\times(3x+5y)-y\times(3x+5y)$

$= (x\times3x)+(x\times5y)-(y\times3x)-(y\times5y)$

$= 3x^2+5xy-3xy- 5y^2=3x^2+2xy-5y^2$ (समानपदानां योजने सति)

उदाहरणम् 9 गुणनं कुर्वन्तु

(i) (a+7) एवं (b-5) इति (ii) (a^2+2b^2) एवं (5a-3b) इति

समाधानम्

(i) $(a+7)\times(b-5)=a\times(b-5)+7\times(b-5)$

$= ab-5a+7b-35$

लिखन्तु यत् अस्मिन् गुणने कमपि समानं पदं नास्ति।

(ii) $(a^2+2b^2)\times(5a-3b) = a^2$ x $(5a-3b)+2b^2\times(5a-3b)$

$= 5a^3-3a^2 b+10ab^2-6b^3$

9.9.2 द्विपदस्य त्रिपदेन साकं गुणनम्

अस्मिन् गुणने वयं त्रिपदस्य प्रत्येकं पदं द्विपदस्य प्रत्येकेन पदेन सह गुणनं कुर्मः। एवं रीत्या वयं पदं $3\times2 = 6$ पदानि प्राप्स्यामः। यदि यदि गुणनसमये समानपदानि भवन्ति, तर्हि प्राप्तपदानां संख्या न्यूनीभूय पञ्च अथवा तस्मात् अपि न्यूनं भवितुम् अर्हति।

$\underbrace{(a+7)}_{\text{द्विपदं}} \times \underbrace{(a^2+3a+5)}_{\text{त्रिपदं}} = a\times(a^2+3a+5)+7\times(a^2+3a+5)$ वितरणनियमस्य उपयोगेन

$= a^3+3a^2+5a+7a^2+21a+35$

$= a^3\ (3a^2+7a^2)+(5a+21a)+35$

$= a^3+10a^2+26a+35$ (अन्तिम-परिणामे केवलं चत्वारि पदानि एव कथं सन्ति ?)

उदाहरणम् 10 सरलीकुर्वन्तु $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)\ c$

समाधानम् वयं प्राप्नुमः

$(a+b)(2a-3b+c) = a\ (2a-3b+c)+b\ (2a-3b+c)$

$= 2a^2-3ab+ac+2ab-3b^2+bc$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac$

(ध्यानं ददतु -3ab एवं 2ab समानं पदम् अस्ति ।)

तथा $(2a-3b)c=2ac-3bc$ अस्ति ।

अत एव $(a+b)(2a-3b+c)-(2a-3b)c = 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-(2ac-3bc)$

$= 2a^2-ab-3b^2+bc+ac-2ac+3bc)$

$= 2a^2-ab-3b^2+(bc+3bc)+(ac-2ac)$

$= 2a^2-3b^2-ab+4bc-ac$

प्रश्नावली 9.4

1. द्विपदानां गुणनं कुर्वन्तु

(i) $(2x+5)$ तथा $(4x-3)$ (ii) $(y-8)$ तथा $(3y-4)$

(iii) $(2.5l+0.5m)$ तथा $(2.5l+0.5m)$ (iv) $(a+3b)$ तथा $(x+5)$

(v) $(2pq+3q^2)$ तथा $(3pq-2q^2)$ (vi) $\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2\right)$ तथा $4\left(a^2-\frac{2}{3}b^2\right)$

2. गुणनफलं जानन्तु ।

(i) $(5-2x)\ (3+x)$ (ii) $(x+7y)(7x-y)$

(iii) $(a^2+b)(a+b^2)$ (iv) $(p^2-q^2)(2p+q)$

3. सरलं कुर्वन्तु

(i) $(x^2-5)(x+5)+25$ (ii) $(a^2+5)\ (b^3+3)+5$

(iii) $(t+s^2)(t^2-s)$

(iv) $(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)+2\ (ac+bd)$

(v) $(x+y)(2x+y)+(x+2y)(x-y)$

(vi) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(vii) $(1.5x-4y)(1.5x+4y+3)-4.5x+12y$

(viii) $(a+b+c)(a+b-c)$

9.10 सर्वसमिका का अस्ति ?

समिका $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$ इति गृह्णन्तु। a इत्यस्य मानं $a=10$ इत्यस्य कृते वयम् अस्याः समिकायाः उभयोः पक्षयोः मानं जानन्तु।

$a=10$ इत्यस्य कृते वामपक्षः $=(a+1)(a+2)=(10+1)(10+2)=11\times12=132$

दक्षपक्षः $=a^2+3a+2== 10^2+3\times10+2=100+30+2=132$

अतः $a=10$ इत्यस्य कृते समिकायाः उभयः पक्षः समानः अस्ति।

आगच्छन्तु अधुना $a=-5$ इति स्वीकुर्मः।

वामपक्षः $= (a+1)(a+2)=(-5+1)(-5+2)=(-4)\times(-3)=12$

दक्षपक्षः $= a^2+3a+2=(-5)^2+3(-5)+2$

$= 25-15+2=10+2=12$

अतः $a=-5$ इत्यस्य कृते अपि वामपक्षः = दक्षपक्षः अस्ति।

इत्थं वयं प्राप्नुमः यत् a इत्यस्य कस्य अपि मानस्य कृते अस्याः समिकायाः वामपक्षः =दक्षपक्षः अस्ति। ईदृशी समिका या चरस्य सर्वेषां मानानां कृते सत्यं भवति सा सर्वसमिका उच्यते।

इत्थं $(a+1)(a+2)=a^2+3a+2$ एका सर्वसमिका अस्ति।

एकं समीकरणं स्व चरस्य केवलं किञ्चित् निश्चितमानानां कृते एव सत्यं भवति, एतत् चरस्य सर्वेषां मानानां कृते सत्यं न भवति। उदाहरणार्थं समीकरणं $a^2+3a+2=132$ इत्यस्य चर्चां कुर्वन्तु। एतत् समीकरणं $a=10$ इत्यस्य कृते सत्यम् अस्ति यथा वयम् उपर्युक्तपङ्क्तिषु अपश्याम परन्तु $a=-5$ अथवा $a=0$ इत्यादीनां कृते एतत् सत्यं नास्ति।

दर्शयन्तु यत् $a^2+3a+2=132$, $a=-5$ अथवा $a=0$ इत्यादीनां कृते एतत् सत्यं नास्ति।

9.11 मानकसर्वसमिकाः

अधुना वयम् एतादृशीनां तिसृणां सर्वसमिकानां विषये अध्ययनं कुर्मः या बहु उपयोगीनि अस्ति। एकं द्विपदम् अपरेण द्विपदेन सह गुणनं कुर्वन्तः एतां सर्वसमिकां प्राप्नुमः।

सर्वप्रथमं वयं गुणनफलम् $(a+b)(a+b)$अथवा $(a+b)^2$ इत्यस्य विषये चर्चां कुर्मः।

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b\,(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2 \qquad \text{(यतो हि } ab=ba)\end{aligned}$$

अतः $$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2} \qquad \text{(I)}$$

स्पष्टतः एतत् एका सर्वसामिका अस्ति यतो हि वास्तविकगुणनद्वारा वामपक्षतः दक्षपक्षस्य प्राप्तिः अभवत्। भवन्तः सत्यापितं कर्तुं शक्नुवन्ति यत् a तथा b इत्यस्य कस्यापि मानस्य कृते सर्वसमिकायाः उभयोः पक्षयोः मानं समानम् अस्ति।

- अस्मात् पश्चात् वयं गुणनफलं $(a-b)(a-b)$ अथवा $(a-b)^2$ इत्यस्य विषये चर्चां कुर्मः।

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)=a\,(a-b)-b\,(a-b)\\ &= a^2-ab-ba+b^2= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

अथवा $$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2} \qquad \text{(II)}$$

● अन्ततः $(a+b)(a-b)$ इत्यस्मिन् विचारं कुर्मः।

वयं प्राप्तवन्तः $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$

$$= a^2-ab+ba-b^2= a^2-b^2 \quad (\text{यतो हि } ab=ba)$$

अथवा $$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2} \qquad \text{(III)}$$

सर्वसमिका (I) (II) तथा (III) मानकसर्वसमिकाः उच्यन्ते।

प्रयासं करोतु

सर्वसमिका (I) इत्यस्मिन् b इत्यस्य स्थाने -b रक्षतु। किं भवन्तः (II) इति सर्वसमिकां प्राप्नुवन्ति ?

● अधुना वयम् एका अधिक-उपयोगिसर्वसमिकायाः अध्ययनं कुर्मः।

$$(x+a)(x+b)=x(x+b)+a(x+b)$$
$$= x^2+bx+ax+ab$$

अथवा $$\boxed{(x+a)(x+b)=x2+(a+b)x+ab} \qquad \text{(IV)}$$

प्रयासं करोतु

1. a=2, b=3, x=5 इत्यस्य कृते सर्वसमिका (IV) इत्यस्य निरूपणं कुर्वन्तु।
2. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् a=b ग्रहणे सति भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (I) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?
3. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् a=-c तथा b=-c इति ग्रहणे सति भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (II) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?
4. सर्वसमिका (IV) इत्यस्मिन् b=-a गृह्णन्तु भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? किम् एषा सर्वसमिका (III) इत्यनेन सह सम्बन्धितः अस्ति ?

वयं द्रष्टुं शक्नुमः यत् सर्वसमिका (IV) अन्याषां तिसृणां सर्वसमिकानां व्यापकं रूपम् अस्ति।

9.12 सर्वसमिकानाम् उपयोगः

अधुना वयं द्रक्ष्यामः यत् सर्वसमिकानाम् उपयोगः द्विपदव्यञ्जकानां गुणनं तथा संख्यानां गुणनस्य कृते अपि साधारणं वैकल्पिकविधिं प्रददाति।

उदाहरणम् 11 सर्वसमिका (I) इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः (i) $(2x+3y)^2$ (ii) 103^2 जानन्तु।

समाधानम्

$$(2x+3y)^2 = (2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2 \quad [\text{ सर्वसमिका (I) इत्यस्य उपयोगेन }]$$
$$= 4x^2+12xy+9y^2$$

वयं $(2x+3y)^2$ इत्यस्य मानं साक्षात् ज्ञातुं शक्नुमः।

$$(2x+3y)^2 = (2x+3y)(2x+3y)$$
$$= (2x)(2x)+(2x)(3y)+(3y)(2x)+(3y)(3y)$$

$= 4x^2+6xy+6\ yx+9y^2$ (यतोहि xy=yx)

$= 4x^2+12xy+9y^2$ (यतोहि xy=yx)

सर्वसमिका (I) इत्यस्य उपयोगेन वयं (2x+3y) इत्यस्य वर्गीकरणस्य वैकल्पिकविधिं प्राप्नुमः।

किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् उपर्युक्तसाक्षात् विधेः अपेक्षया सर्वसमिकाविधेः चरणानां संख्या न्यूना अस्ति ? भवन्तः अस्याः विधेः सरलतां तदा अनुभविष्यन्ति यदा भवन्तः (2x+3y) इत्यस्य अपेक्षया अधिकानां जटिलानां द्विपदव्यञ्जकानां वर्गीकरणस्य प्रयत्नं करिष्यन्ति।

(ii) $(103)^2 = (100+3)^2$

$= 100^2+2\times100\times3+3^2$

$= 10000+600+9=10609$

वयं 103 इति 103 इत्यनेन साक्षात् गुणनं कृत्वा वाञ्छित-उत्तरं प्राप्तुं शक्नुमः। किं भवन्तः ध्यानं दत्तवन्तः यत् 103 इत्यस्य साक्षात् विधेः वर्गीकरणस्य अपेक्षया सर्वसमिका (I) अस्मभ्यं सरलविधिं प्रदत्तवती ? 1013 इत्यस्य वर्गीकरणस्य प्रयत्नं कुर्वन्तु। भवन्तः अस्यां स्थितौ अपि साक्षात् गुणनविधेःअपेक्षया सर्वसमिकानाम् उपयोगविधिम् अधिकं सरलं प्राप्स्यन्ति।

उदाहरणम् 12 सर्वसमिका (II) इत्यस्य उपयोगेन (i) $(4p-3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ जानन्तु।

समाधानम्

(i) $(4p-3q)^2 = (4p)^2-2(4p)(3q)+(3q)^2$ [सर्वसमिका (II) इत्यस्य उपयोगेन]

$= 16p^2-24pq+9q^2$

किं भवन्तः सम्मताः सन्ति यत् $(4p-3q)^2$ इत्यस्य वर्गीकरणार्थं साक्षात् विधेः अपेक्षायां सर्वसमिकानां विधिः अधिकः असमीचीनः वर्तते।

(ii) $(4.9)^2 = (5.0-0.1)^2 = (5.0)^2-2(5.0)(0.1)+(0.1)^2$

$= 25.00-1.00+0.01=24.01$

किं 4.9 इत्यस्य वर्गीकरणं साक्षात् गुणनविधेः अपेक्षया (II) इति सर्वसमिकायाः सहायतया सरलं नास्ति ?

उदाहरणम् 13 सर्वसमिका (III) इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः,

(i) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)$ (ii) 983^2-17^2 (iii) 194 ×206 इति जानन्तु।

समाधानम्

(ii) $\left(\frac{3}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{2}m-\frac{2}{3}n\right)=\left(\frac{3}{2}m\right)^2-\left(\frac{2}{3}n\right)^2$

$=\frac{9}{4}m^2-\frac{4}{9}n^2$

एतम् साक्षात् कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु भवन्तः अनुभविष्यन्ति यत् अस्माकं सर्वसमिकायाः उपयोगविधिः अतीवसरलः अस्ति।

$983^2-17^2=(983+17)(983-17)$

[अत्र $a=983, b-17, a^2-b^2=(a+b)(a-b)$]

अत एव $983^2-17^2=1000\times966=966000$

$194\times206=(200-6)\times(200+6) = 200^2-6^2$

$= 40000-36=39964$

उदाहरणम् 14 निम्नलिखितान् ज्ञातुं $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) 501×502 (ii) 95×103

समाधानम्

(i) $501\times502 = (500+1)\times(500+2)=500^2+(1+2)\times500+1\times2$

$= 250000+1500+2=251502$

(ii) $95\times103 = (100-5)\times(100+3) = 100^2+(-5+3)100+(-5)\times3$

$= 10000-200-15=9785$

प्रश्नावली 9.5

1. निम्नलिखित गुणनफलेषु प्रत्येकं प्राप्तुम् उचितसर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) $(x+3)(x+3)$ (ii) $(2y+5)(2y+5)$ (iii) $(2a-7)(2a-7)$

(iv) $(3a-\frac{1}{2})(3a-\frac{1}{2})$ (v) $(1.1m-0.4)(1.1m+0.4)$

(vi) $(a^2+b^2)(-a^2+b^2)$ (vii) $(6x-7)(6x+7)$ (viii) $(-a+c)(-a+c)$

(ix) $\left(x/2+\frac{3y}{4}\right)\left(x/2+\frac{3y}{4}\right)$ (x) $(7a-9b)(7a-9b)$

2. निम्नलिखितगुणनफलं ज्ञातुं $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\ x+ab$ सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तु।

(i) $(x+3)\ (x+7)$ (ii) $(4x+5)\ (4x+1)$

(iii) $(4x-5)\ (4x-1)$ (iv) $(4x+5)\ (4x-1)$

(v) $(2x+5y)\ (2x+3y)$ (vi) $(2a^2+9)\ (2a^2+5)$

(vi) $(xyz-4)\ (xyz-2)$

3. सर्वसमिकायाः उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितवर्गान् जानन्तु।

(i) $(b-7)^2$ (ii) $(xy+3z)^2$ (iii) $(6x^2-5y)^2$

(iv) $\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{2}n\right)^2$ (v) $(0.4p-0.5q)^2$ (vi) $(2xy+5y)^2$

4. सरलीकुर्वन्तु

(i) $(a^2-b^2)^2$ (ii) $(2x+5)^2-(2x-5)^2$

(iii) $(7m-8n)^2+(7m+8n)^2$ (iv) $(4m+5n)^2+(5m+4n)^2$

(v) $(2.5p-1.5q)^2-(1.5p-2.5q)^2$ (vi) $(ab+bc)^2-2ab^2c$

(vii) $(m^2-n^2m)^2+2m^3n^2$

5. प्रदर्शयन्तु यत् -

(i) $(3x+7)^2-84x=(3x-7)^2$ (ii) $(9p-5q)^2+180pq=(9p+5q)^2$

(iii) $\left(\frac{4}{3}m - \frac{3}{4}n\right)^2 + 2mn = \frac{16}{9}m^2 + \frac{9}{16}n^2$

(iv) $(4pq+3q)^2-(4pq-3q)^2 = 48\,pq^2$

(v) $(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)=0$

6. सर्वसमिकानाम् उपयोगेन निम्नलिखितं मानं जानन्तु।

(i) 71^2 (ii) 99^2 (iii) 102^2 (iv) 998^2 (v) 5.2^2

(vi) 297×303 (vii) 78×82 (viii) 8.9^2 (ix) 1.05×9.5

7. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितानां मानं जानन्तु।

(i) 51^2-49^2 (ii) $(1.02)^2-(0.98)^2$ (iii) 153^2-147^2

(iv) $12.1^2-7.9^2$

8. $(x+a)(x+b)= x^2+(a+b)x+ab$ इत्यस्य उपयोगं कुर्वन्तः निम्नलिखितानां मानं जानन्तु।

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

वयं किं चर्चितवन्तः ?

1. चराणाम् अचराणाञ्च सहायतया व्यञ्जकाः भवन्ति।
2. व्यञ्जकान् निर्मातुं पदानां योगः भवति। स्वयमेव पदानां निर्माणं गुणनखण्डानां गुणनफलरूपे भवति।
3. व्यञ्जकः यस्मिन् एकं,द्वे, त्रीणि वा पदानि भवन्ति क्रमशः एकपदी, द्विपदी तथा त्रिपदी नाम्ना ज्ञायते। सामान्यतः एकपदीय-व्यञ्जकः अथवा अधिकपदीय-व्यञ्जकः यस्मिन् पदानां गुणाङ्कः शून्येतरः अस्ति तथा चराणां घातः ऋणेतरः अस्ति तत् बहुपदम् उच्यते।
4. समान चरैः समानपदं भवति तथा एतेषां चराणां घातः अपि समानः भवति। समानपदानां गुणाः समानाः भवेयुः इति आवश्यकं नास्ति।
5. बहुपदानां योगाय (अथवा व्यवकलनाय) सर्वप्रथमं समानपदम् अन्विषन्तु तथा तानि योजयन्तु (अथवा व्यवकलयन्तु) तत् पश्चात् असमानपदानाम् उपयोगं कुर्वन्तु।
6. बहुषु परिस्थितिषु वयं बीजीयव्यञ्जकानां गुणनकरणस्य आवश्यकताम् अनुभवामः। उदाहरणार्थं आयतस्य क्षेत्रफलं ज्ञातुं भुजाः बीजीयव्यञ्जकरूपे प्रदर्शिताः सन्ति।
7. एकपदीनां एकपद्या सह गुणने सति सर्वदैव एकपदी एव प्राप्यते।
8. बहुपदानां एकपद्या सह गुणनं कर्तुं बहुपदस्य प्रत्येकपदं एकपद्या सह गुणनं क्रियते।
9. बहुपदानां द्विपदेन (अथवा त्रिपदेन) गुणनं कर्तुं वयम् पदशः गुणनं कुर्मः। अर्थात् बहुपदानां प्रत्येकं पदं द्विपदस्य (अथवा त्रिपदस्य) प्रत्येकपदेन साकं गुणनं भवति। ध्यानं ददतु एतादृशे गुणने वयं गुणनफले समानपदं प्राप्तुं शक्नुमः तथा तेषां योगस्य अपि आवश्यकता भवितुम् अर्हति।
10. सर्वसमिका एका ईदृशी समिका अस्ति या चराणां सर्वेषां मानानां कृते सत्यं भवति यद्यपि समीकरणं चराणां केषाञ्चित् निश्चितमानानां कृते सत्यं भवति। समीकरणं सर्वसमिकाः न सन्ति।

11. निम्नलिखितमानकं सर्वसमिकाः सन्ति -

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (I)

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (II)

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (III)

12. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ (IV) एका अन्या उपयोगी-सर्वसमिका अस्ति।

13. उपर्युक्तचतस्रः सर्वसमिकाः बीजीयव्यञ्जकानां गुणनफलं ज्ञातुम् एवं वर्गं कर्तुं सहायिकाः सन्ति। एताः सर्वसमिकाः अस्मभ्यं संख्यानां गुणनफलं ज्ञातुं सरलवैकल्पिकविधिं प्रददति।